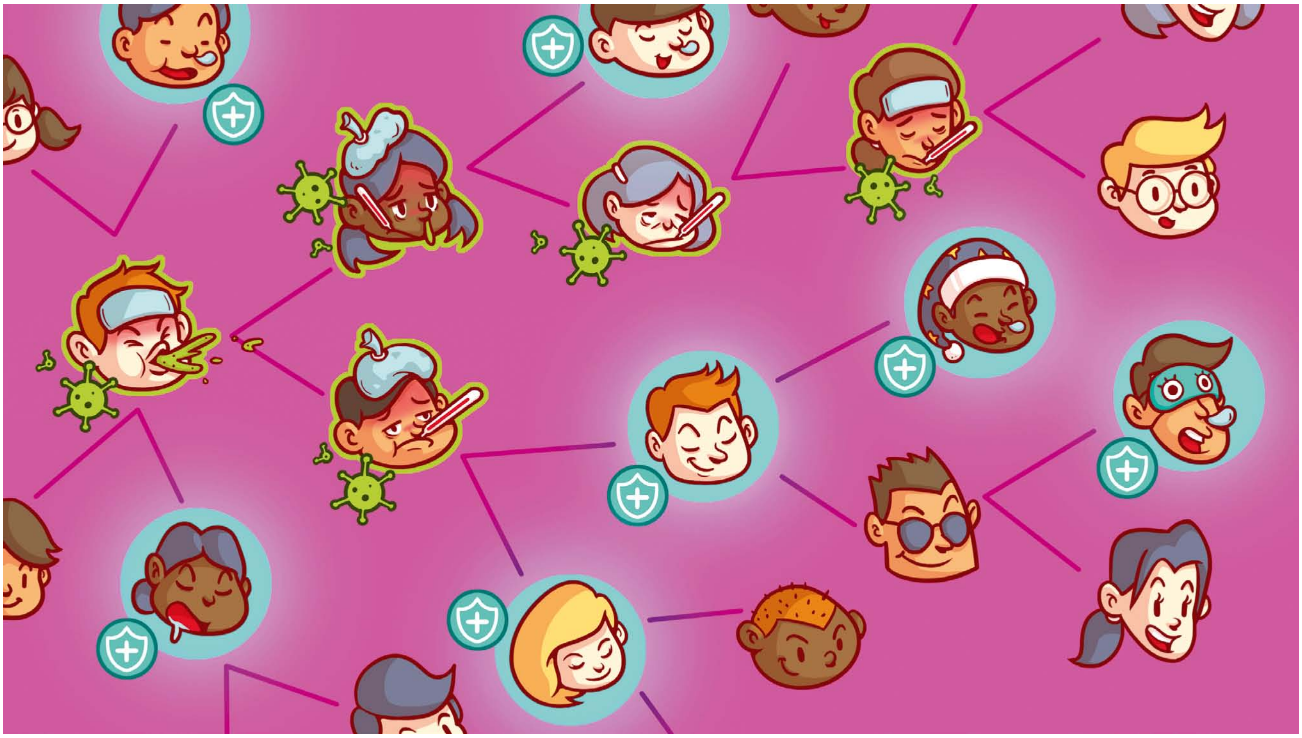
por Patrick Honner

Patrick Honner es profesor de matemáticas y computación en un instituto de secundaria de Brooklyn, Nueva York. Reconocido divulgador, en 2013 recibió el Premio Presidencial a la Excelencia en la Enseñanza de Matemáticas y Ciencias de EE.UU.

Las matemáticas de las epidemias (y de las vacunas)

Un cálculo sencillo muestra cómo la vacunación puede interrumpir la propagación exponencial de una enfermedad y lograr la inmunidad de grupo



BIG MOUTH/QUANTA MAGAZINE

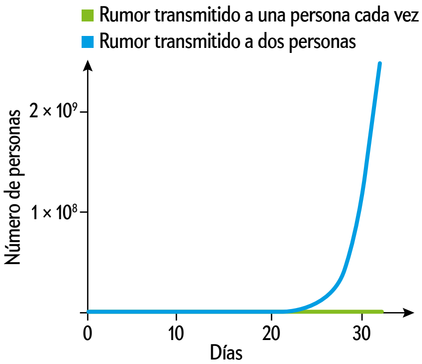
Imagine que oye un rumor tan jugoso que le resulta imposible guardarlo en secreto. Pese a que usted detesta los chismorreos, decide contárselo a un amigo y luego mantener la boca cerrada. No es para tanto, ¿verdad? Si su amigo adopta la misma postura y se lo cuenta solo a otro, el rumor no se difundirá demasiado. Si el proceso se repite cada día, al cabo de un mes se habrán enterado solo 31 personas, incluyéndole a usted.

Así pues, ¿qué mal podría causar decírselo a dos amigos en vez de a uno? Sin embargo, en tal caso las consecuencias serían desastrosas. Si cada individuo se lo cuenta al día siguiente a otros dos, al cabo de un mes el rumor habrá alcanzado a más de un cuarto de la población mundial: 2.147.483.647 personas (o para ser más precisos, $2^{31} - 1$). ¿Cómo puede un cambio en apariencia tan nimio (contarle algo a dos personas en vez de a una) generar una diferencia tan colosal? La respuesta radica en las respectivas tasas de variación.

En el primer caso, el rumor se transmite cada día al mismo número de personas que el día anterior. Eso se cumplirá hoy, mañana, pasado mañana y así sucesivamente, de modo que el número de nuevas personas que cada día se enteran del secreto se mantiene constante. En nuestro ejemplo, dicho número es uno.

Sin embargo, si cada día el rumor se transmite al doble de personas que el día previo, la cantidad de individuos que lo conocen crecerá de manera exponencial: el primer día se enterarán dos personas; el segundo, cuatro; el tercero, ocho, etcétera. El trigésimo día (dejando a un lado algunas objeciones razonables que abordaremos más adelante), el rumor llegará a la friolera de 2^{30} nuevas personas.

¿De dónde surge esa enorme diferencia entre un caso y otro? La respuesta obedece al distinto comportamiento de las funciones lineales y exponenciales. Las primeras se caracterizan por presentar una tasa de variación constante; en este caso, una persona al día. Las funciones exponenciales, en cambio, tienen una tasa de variación cuyo valor se multiplica cada vez: dos personas oyen el rumor, luego cuatro, luego ocho, luego dieciséis, etcéte-



1. ¿CÓMO SE PROPAGA UN RUMOR si cada persona que lo conoce se lo cuenta a otra? ¿Y si se lo cuenta a dos? En el primer caso (*verde*), el crecimiento es lineal, mientras que en el segundo (*azul*) es exponencial. Esto último implica que, pasados unos días, el rumor llegará a más de 2000 millones de personas.

ra. A diferencia de lo que ocurre si la función es lineal, el crecimiento exponencial se acelera; su tasa de variación aumenta cada vez más rápido.

Ahí radica la diferencia entre que al cabo de 30 días el rumor lo conozcan 31 personas o 2000 millones. No es más que una consecuencia de que cada individuo se lo revele a dos personas en vez de a una (*véase la figura 1*).

Número de reproducción

El modelo matemático elemental que acabamos de describir capta la esencia de varios procesos que van mucho más allá de la propagación de rumores. Como cualquier modelo sencillo, pasa por alto o simplifica varios factores que hacen que en el mundo real la situación sea más compleja (como la probabilidad de transmisión de un individuo a otro o el tamaño total de la población, por ejemplo). Sin embargo, constituye un magnífico punto de partida para explorar cómo se diseminan las ideas, cómo crecen las poblaciones y, también, cómo se propagan las enfermedades infecciosas.

Enfermedad	Número básico de reproducción (R_0)
Sarampión	12-18
Viruela	5-7
Paperas	4-7
Gripe (pandemia de 1918)	2-3

FUENTES: CENTRO DE CONTROL DE ENFERMEDADES E INSTITUTOS NACIONALES DE SALUD DE EE.UU. (*tabla*)

Las enfermedades infecciosas se extienden igual que un rumor: alguien contrae el patógeno y lo transmite a otra persona. Existen diferencias, por supuesto, pero el mismo modelo matemático básico sirve para describir ambas situaciones. En nuestro ejemplo inicial, vimos cómo un pequeño cambio en la tasa de transmisión del rumor provocaba un efecto gigantesco en el número de personas que acababan enterándose pasados unos días. Con las enfermedades infecciosas sucede lo mismo: la diferencia entre contagiar a una persona o hacerlo a dos puede significar que nos hallemos ante unos pocos casos aislados o ante una epidemia.

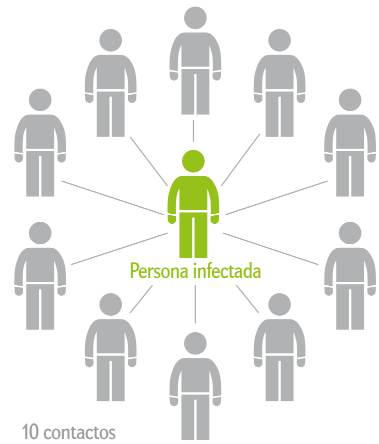
La velocidad de propagación de una enfermedad infecciosa depende de todo un abanico de factores biológicos, ambientales y sociales. No obstante, los epidemiólogos resumen el impacto de todos esos condicionantes en una cantidad: el «número básico de reproducción», denotado R_0. Este representa el valor promedio de nuevos contagios que cabe esperar por cada persona infectada.

En nuestros ejemplos, los números básicos de reproducción eran $R_0 = 1$ (cada sujeto revelaba el secreto a una y solo una persona) y $R_0 = 2$ (cada individuo transmitía el rumor a exactamente dos personas). El «período infeccioso» era de un día. La tabla que adjuntamos aquí muestra algunos números reproductivos básicos de varias enfermedades bien estudiadas.

Nótese que todos los R_0 listados superan la unidad. Esa es, en parte, la razón por la que las enfermedades correspondientes resultan tan peligrosas. Dado que, por término medio, cada persona contagiará a más de una, el número de individuos infectados crecerá de manera exponencial, lo que puede desencadenar un impacto devastador sobre la población. Sin embargo, dado un R_0 que implique un crecimiento exponencial, ¿podemos convertirlo en lineal? En otras palabras, ¿es posible reducir a uno el número de reproducción de una enfermedad?

La importancia de las vacunas

Es aquí donde intervienen las vacunas. Una persona vacunada desarrolla resistencia frente a la enfermedad. Las tasas de éxito varían, pero, para simplificar, supondremos que la vacunación brinda una inmunidad completa frente al patógeno. Esto no solo beneficia de forma directa al individuo vacunado, sino también, de manera indirecta, a toda la población. Si un gran número de personas se vacunan



2. DIAGRAMA DE CONTACTOS de una persona infectada (*verde*). En este ejemplo, dicha persona interacciona con 10 individuos (*gris*) durante el período infeccioso.

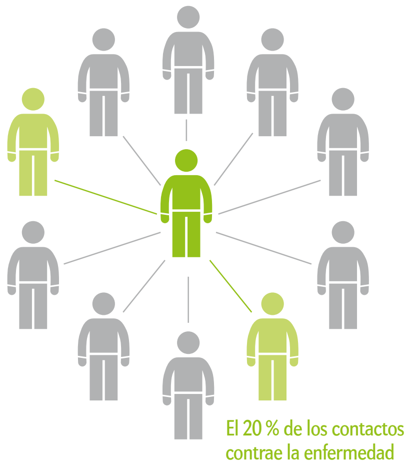
contra una enfermedad, esta no se propagará con tanta rapidez.

En la práctica, la vacunación generalizada reduce el número reproductivo de la enfermedad. Y si se vacuna una cantidad suficiente de personas, dicho número puede decrecer hasta uno, lo que garantizará que la infección se propagará solo de forma lineal. Podemos entonces plantearnos la siguiente pregunta: ¿qué fracción de la población ha de vacunarse para que el número de reproducción de una enfermedad baje hasta uno?

Pensemos con detenimiento qué nos dice realmente el número básico de reproducción. Consideremos una epidemia de gripe con $R_0 = 2$. Eso significa que, por término medio, cada persona infectada contagiará a otras dos. Un solo número, $R_0 = 2$, combina una gran cantidad de información: cuán fácilmente se transmite el virus, la duración del período infeccioso, y la cantidad media de personas con las que un individuo infectado interactuará durante un cierto intervalo de tiempo. Si diseccionamos con detalle dicho número, podremos calcular con facilidad cómo contribuye la vacunación a frenar la enfermedad.

Supongamos que una persona que ha contraído una gripe con $R_0 = 2$ tiene contacto con otras diez mientras puede contagiar la enfermedad. Podemos plasmar dicha situación en un diagrama en cuyo centro situaremos a la persona con gripe y, alrededor, a las otras diez con quien ha interactuado (*véase la figura 2*).

Todas ellas presentan un cierto riesgo de contagiarse. Pero el hecho de que $R_0 = 2$ significa que, de media, solo dos de



3. CONTAGIOS ESPERADOS (*verde*) en el caso de una enfermedad con un número reproductivo de $R_0 = 2$. Si suponemos que cada persona infectada tiene una media de 10 contactos por período infeccioso, podemos estimar la probabilidad individual de contagio en un 20 por ciento.

ellas lo harán (*véase la figura 3*). Así pues, podemos concluir que cada persona tiene una probabilidad del 20 por ciento (2/10) de contraer la enfermedad.

Ahora imaginemos que dos de esas diez personas están vacunadas. Si suponemos que la vacuna confiere una inmunidad completa, la infección no podrá transmitirse a ellas. Por su parte, cada uno de los ocho contactos restantes seguirá teniendo una probabilidad individual de contagiarse del 20 por ciento. De modo que, en promedio, de esas diez personas ahora enfermarán solo $8 \times 0{,}2 = 1{,}6$.

Así pues, si dos de cada diez individuos se vacunan, una persona infectada contagiará de media a otras 1,6. Gracias a la vacunación, el número reproductivo de la enfermedad ha bajado de 2 a 1,6. Entonces, ¿qué hemos de hacer para reducirlo hasta 1 y evitar así el crecimiento exponencial de la enfermedad?

Frenar el crecimiento exponencial

De nuevo, consideraremos que nuestro enfermo inicial entra en contacto con diez personas durante el período infeccioso, y que cada individuo no vacunado presenta un 20 por ciento de probabilidades de contraer el patógeno. Pero ahora supongamos que, de esas diez personas, V están vacunadas. Cabe esperar que, por término medio, se contagien el 20 por ciento de los $10 - V$ individuos no vacunados; es decir, $0{,}2 \times (10 - V)$. Para conseguir un crecimiento lineal y no exponencial, necesitamos que el número promedio de nuevas infecciones sea uno. Por tanto, hemos de resolver la ecuación

$$0{,}2 \times (10 - V) = 1.$$

Una simple manipulación algebraica nos revela que el valor $V = 5$ satisface la ecuación.

Veamos qué sucede cuando cinco de las diez personas con las que interactúa el enfermo están vacunadas (*véase la figura 4*). En la práctica, la vacunación elimina a esos cinco individuos del diagrama de contactos, puesto que ninguno de ellos puede contraer la enfermedad. Por otro lado, cada uno de los cinco sujetos restantes conserva una probabilidad del 20 por ciento de contagiarse, por lo que, en promedio, solo uno de ellos lo hará. De esta manera, al vacunar a la mitad de los individuos, hemos reducido el número reproductivo de 2 a 1.

El proceso puede generalizarse para cualquier número reproductivo básico. Si suponemos que cada individuo infectado entra en contacto con N personas nuevas por período infeccioso, cabe esperar que, en promedio, una fracción R_0/N de ellas enfermará. Pero si, de esas N personas, un número V están vacunadas, entonces el número de nuevas infecciones vendrá dado por la expresión

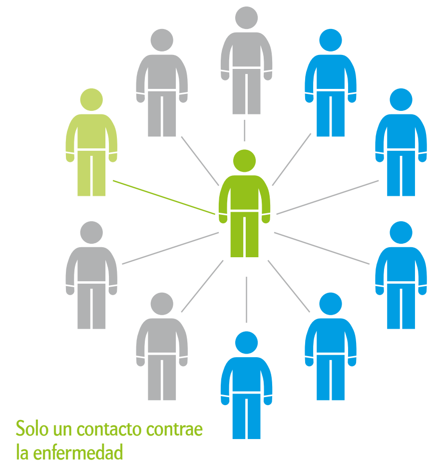
$$R_0/N(N - V).$$

Y dado que nuestro objetivo es que dicho número sea igual a 1, hemos de resolver la ecuación

$$R_0/N(N - V) = 1.$$

Aquí la verdadera incógnita es V/N, puesto que esta cantidad representa el porcentaje total de individuos vacunados de la población. Así pues, conviene reescribir la expresión anterior como

$$V/N = 1 - 1/R_0.$$



4. EN LA PRÁCTICA, la vacunación elimina a los individuos inmunizados (*azul*) del diagrama de contactos. La probabilidad de contraer la enfermedad entre quienes no lo están se mantiene constante (20 por ciento), por lo que ahora se contagiará solo una persona en lugar de dos.

En otras palabras: si la fracción de individuos vacunados entre la población general asciende a $1 - 1/R_0$, entonces cada persona infectada contagiará solo a otra. Por tanto, $1 - 1/R_0$ es el valor mágico que da como resultado un crecimiento lineal, y no exponencial, de la enfermedad.

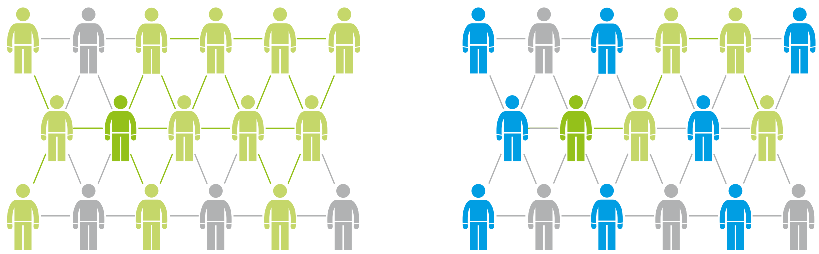
Inmunidad de grupo

Ese porcentaje de vacunaciones consigue una especie de inmunidad colectiva frente a la enfermedad: no impide que todas y cada una de las personas se contagien, pero sí frena la propagación exponencial. Esta propiedad se conoce como «inmunidad de grupo», y el porcentaje de vacunaciones requerido para lograrla se denomina «umbral de inmunidad colectiva» (*véase la tabla*).

La vacunación no solo supone un beneficio para el individuo vacunado, sino también para toda la población. Cuando se alcanza el umbral de inmunidad colectiva,

Enfermedad	Número básico de reproducción (R_0)	Umbral de inmunidad colectiva* UIC = $1 - 1/R_0$
Sarampión	12	91,7 %
Viruela	5	80 %
Paperas	4	75 %
Gripe (pandemia de 1918)	2	50 %

* Porcentaje de vacunaciones necesario para conseguir la inmunidad de grupo



5. LA VACUNACIÓN GENERALIZADA transforma un diagrama con numerosas vías de propagación (*izquierda*) en uno que reduce drásticamente el número de rutas infecciosas (*derecha*). Ello deriva en una propagación más lenta de la enfermedad y disminuye el riesgo de un brote epidémico.

la enfermedad se transmite a una velocidad lo suficientemente baja para prevenir una posible catástrofe (*véase la figura 5*).

Otra característica clave de la inmunidad de grupo reside en que no solo protege a las personas vacunadas, sino también a quienes no lo están. Dado que disminuye la probabilidad de que la enfermedad se extienda de manera indiscriminada, todos corren un riesgo mucho menor, incluso quienes no están inmunizados. Esto reviste especial importancia para aquellas personas que no pueden vacunarse por motivos médicos.

Aunque aquí hemos supuesto que las vacunas son eficaces al cien por cien, los beneficios de la inmunidad de grupo pueden lograrse aun cuando su eficacia sea inferior. Incluso en tales casos, la vacunación generalizada reduce la cantidad media de contagios por persona infectada, lo que rebaja el número de reproducción efectivo de la enfermedad.

Hemos visto la descomunal diferencia entre un crecimiento lineal y uno exponencial. En lo que atañe a la transmisión de enfermedades, esta distinción puede convertirse en una cuestión de vida o muerte. Las matemáticas que subyacen a la vacunación y a la inmunidad de grupo son importantes. Así que cuénteselo a un amigo. O mejor aún: cuénteselo a dos.

Nota de los editores: En lo que respecta a la actual pandemia de COVID-19, el número básico de reproducción (R_0) no se conoce con exactitud y las estimaciones varían de país a país. Un informe del Imperial College de Londres fechado el 30 de marzo y basado en el análisis de 11 países europeos proporcionaba una horquilla de valores medios para R_0 (al inicio de la epidemia; es decir, anterior a las medidas de control) de entre 2,5 y 5 aproximadamente.

Este artículo apareció originalmente en QuantaMagazine.org, una publicación independiente promovida por la Fundación Simons para potenciar la comprensión pública de la ciencia

Quanta magazine

PARA SABER MÁS

Estimating the number of infections and the impact of nonpharmaceutical interventions on COVID-19 in 11 European countries. Equipo de respuesta a la COVID-19 del Imperial College, 30 de marzo de 2020. Disponible en **https://www.imperial.ac.uk/mrc-global-infectious-disease-analysis/covid-19**

EN NUESTRO ARCHIVO

Modelos de propagación de enfermedades. Joan Saldaña en *IyC*, octubre de 2013.

Prever la próxima pandemia. Alessandro Vespignani en *IyC*, julio de 2018.